

|  |
| --- |
| МИНОБРНАУКИ РОССИИ |
| Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  **"МИРЭА** - **Российский технологический университет"**  **РТУ МИРЭА** |

**Институт** Информационных Технологий

**Кафедра** Вычислительной Техники

**ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ**

**по дисциплине**

**«Математическое обеспечение систем поддержки принятия решений»**

Студент группы: ИКБО-14-20 Вежновец Ф.Ю.\_\_ *(Ф.И.О.студента)*

Руководитель \_\_Семенов Р.Э.\_\_

*(Ф.И.О. преподавателя)*

Москва 2023

**Содержание**

[ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА: СИМПЛЕКС МЕТОД 3](#_Toc132142678)

[1.1 Постановка задачи 3](#_Toc132142679)

[1.2 Описание симплекс метода 3](#_Toc132142680)

[1.3 Ручной расчёт итераций симплекса 4](#_Toc132142681)

[1.4 Программная реализация 6](#_Toc132142682)

[1.5 Вывод 10](#_Toc132142683)

[ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА: МЕТОД НЕЛДЕРА-МИДА 11](#_Toc132142684)

[2.1 Постановка задачи 11](#_Toc132142685)

[2.2 Описание симплекс метода 11](#_Toc132142686)

[2.3 Ручной расчёт итераций Нелдера-Мида 13](#_Toc132142687)

[2.4 Программная реализация 15](#_Toc132142688)

[2.5 Вывод 19](#_Toc132142689)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА: СИМПЛЕКС МЕТОД

1.1 Постановка задачи

Пользуясь лекционными материалами и методическими указаниями реализовать симплексный метод.

Найти минимум целевой функции.

Симплексным методом с точностью

Размерность задачи n = 2.

Зададим начальную точку симплекса и длину ребра симплекса m = 0,07.

1.2 Описание симплекс метода

Регулярным симплексом в n-мерном пространстве называется правильный многогранник с n+1вершиной. При n = 2 симплексом является правильный треугольник, при n = 3 – тетраэдр и т.д. Отрезок, соединяющий 2 вершины симплекса, называется ребром симплекса.

Поиск симплексным методом ведется по следующей схеме. Устанавливаются координаты вершин симплексов. Определяется вершина с наибольшим значением целевой функции. Вместо нее сроиться новая вершина отражением старой через центр тяжести остальных вершин симплекса. На рисунке 1.1 представлен процесс построения нового симплекса на плоскости.



Рисунок 1.1 – Построение нового симплекса

Если попытка отражения не приводит к уменьшению целевой функции, то выполняется операция редукции, в результате которой формируется новый симплекс с уменьшенными вдвое сторонами. При операции редукции в качестве базовой точки выбирается вершина старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение.

В результате исключения вершин симплексов с наибольшим значением целевой функции процесс поиска сходится к минимальному значению.

Поиск завершается, когда разности между значениями функции в центре тяжести симплекса и вершинах становится достаточно малым.

1.3 Ручной расчёт итераций симплекса

Отобразим изначальную таблицу (Таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Изначальные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |

Вычислим приращения (Формулы 1.2 и 1.3):

Используя и , вычислим координаты двух остальных вершин симплекса (Формулы 1.4 и 1.5):

Итерация k = 0. Вычислим значение целевой функции в вершинах , , :

Отобразим эти значения в таблицe 1.2.

Таблица 1.2 – Новые данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 | ,067 |  |  |

Наибольшее значение целевой функции соответствует вершине , поэтому необходимо отразить ее относительно центра тяжести остальных вершин и . центр тяжести расположен в точке

Используя свойство регулярности, найдем координаты отраженной вершины

В полученной вершине значение целевой функции 𝑓() = 1216,495

Таким образом, получим таблицу 1.3

Таблица 1.3 – Новые данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |

Следовательно, наблюдается уменьшение целевой функции < . Новый симплекс образован вершинами , , , которым соответствует значение целевой функции , , .

Проверим условие окончания поиска . Определим центр тяжести симплекса

В полученной точке .

Вычислим , , .

Так как все условия окончания поиска не выполняются, то процесс итераций должен быть продолжен.

1.4 Программная реализация

Реализуем симплекс метод на языке высокого уровня Python.

На рисунках 1.2 – 1.6 представлен результат работы программы. Листинг кода приведен в Приложении А.

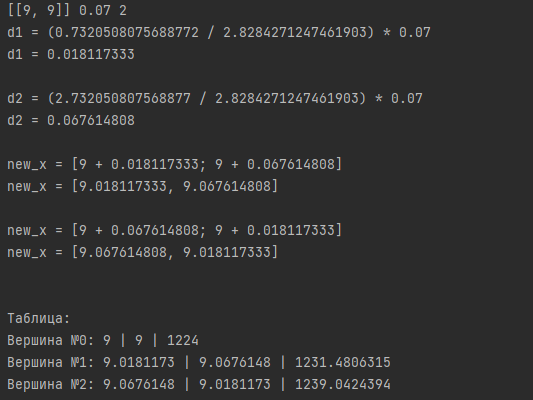


Рисунок 1.2 – Результат работы программы

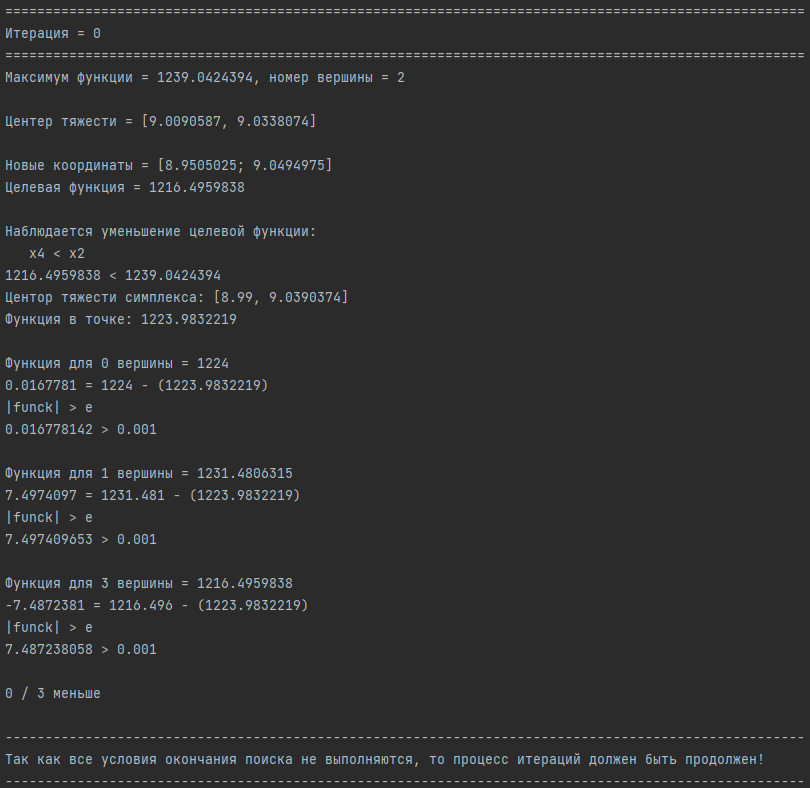


Рисунок 1.3 – Результат работы программы

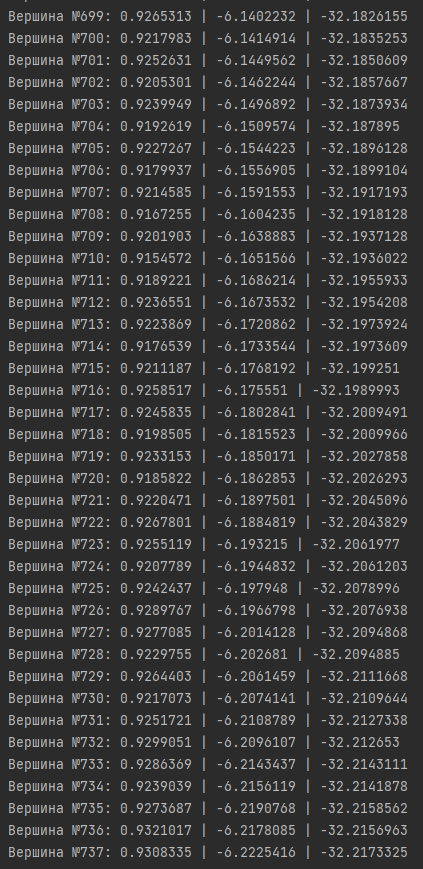


Рисунок 1.4 – Результат работы программы

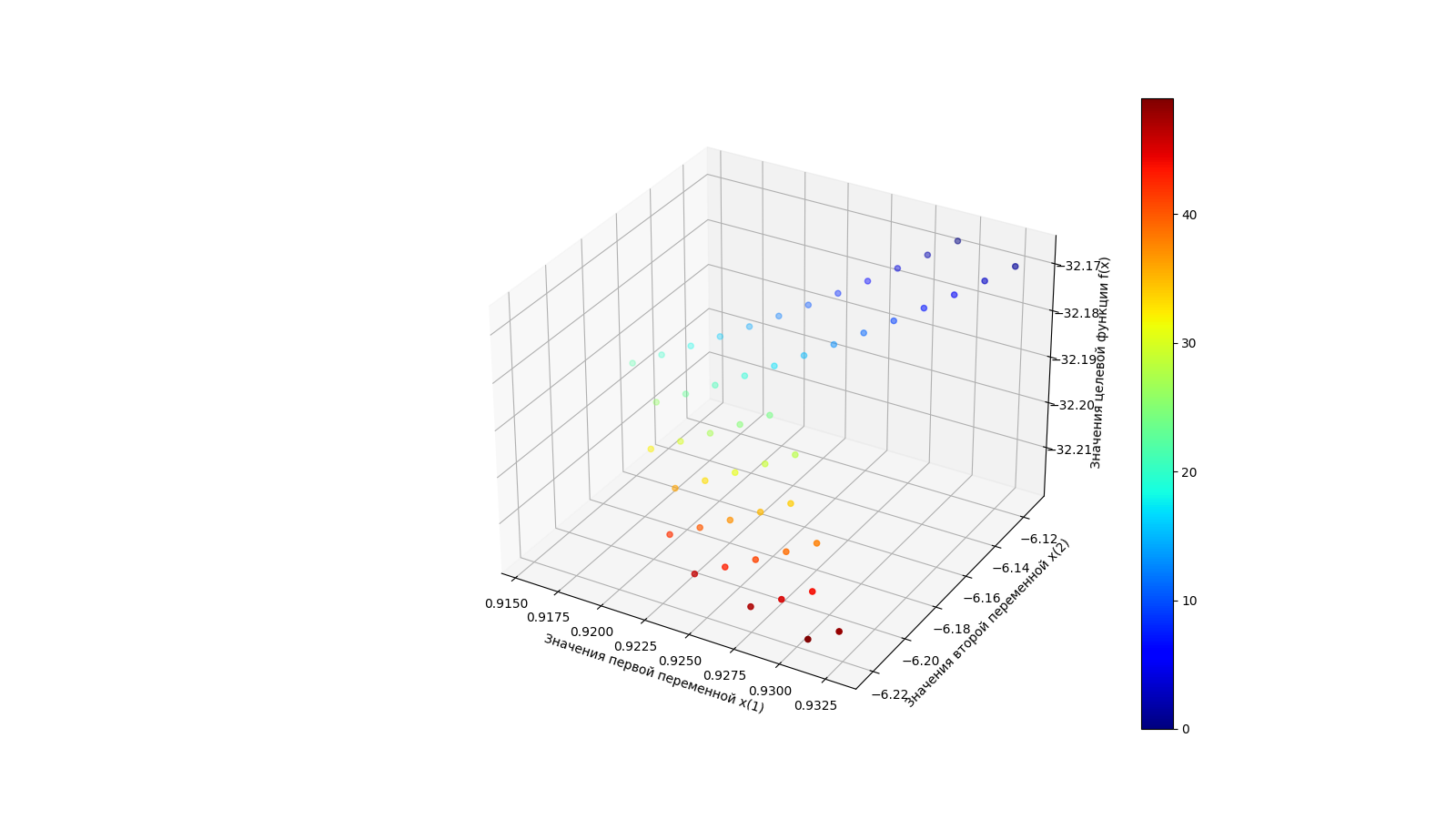


Рисунок 1.5 – Последние 50 элементов таблицы симплекса

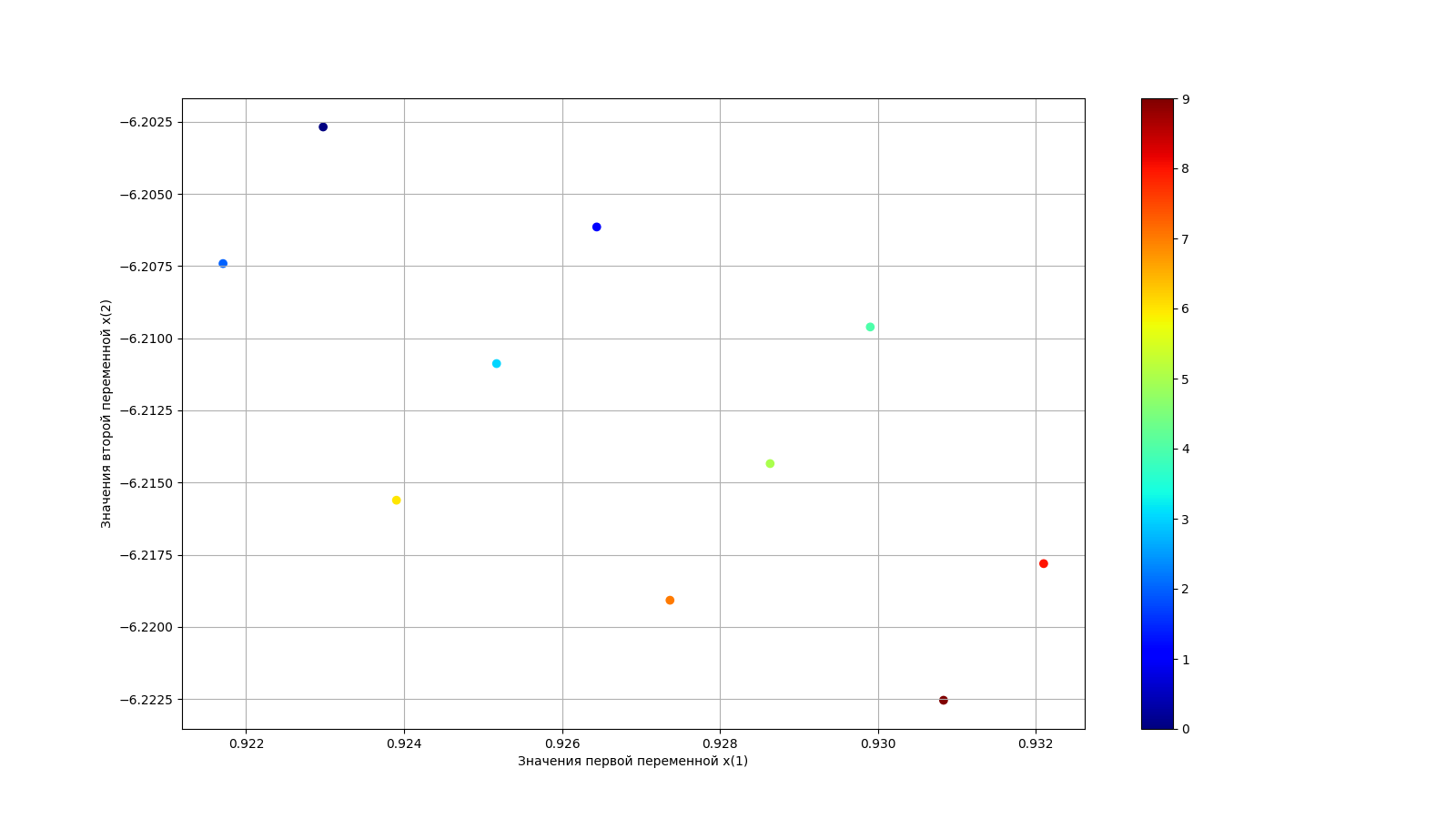


Рисунок 1.6 – Последние 5 элементов таблицы симплекса

Сравним полученные результаты при помощи сайта WolframAlpha (Рисунок 1.7).

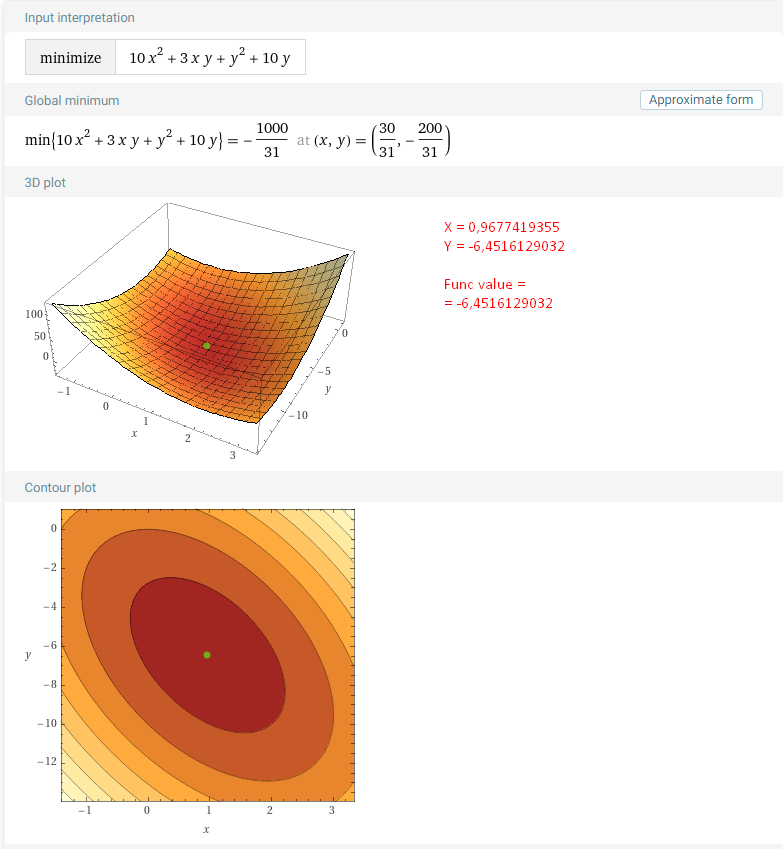


Рисунок 1.7 – Результаты минимизации функции при помощи WolframAlpha

1.5 Вывод

По результатам работы, был реализован симплекс метод (метод нулевого порядка).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. МЕТОД НУЛЕВОГО ПОРЯДКА: МЕТОД НЕЛДЕРА-МИДА

2.1 Постановка задачи

Пользуясь лекционными материалами и методическими указаниями.

Найти минимум целевой функции.

методом Нелдера-Мида с точностью

Размерность задачи .

Длину ребра симплекса

Параметр растяжения

Параметр сжатия

Зададим начальную точку симплекса .

2.2 Описание симплекс метода

В 1964 году Нелдер и Мид предложили модификацию, в которой симплекс может изменять свою форму (растягиваясь и сжимаясь) в зависимости от свойств поверхности целевой функции. Так как в этом случае симплекс не будет уже регулярным, метод назвали поиском по деформируемому многограннику.

И так модифицируем рассмотренный на предыдущей лекции алгоритм минимизации целевой функции по регулярному симплексу, добавив к процедуре отражения при построении нового симплекса процедуры сжатия и растяжения. Геометрическая иллюстрация этих процедур для случая 𝑛=2 представлена на рис. 1, 2 и 3, где введены следующие обозначения:

– наибольшее значение целевой функции;

– следующее по величине за наибольшим значение целевой функции;

– наименьшее значение целевой функции;

– текущие значения целевой функции

1. Операция отображения (Рисунок 2.1)



Рисунок 2.1 – Операция отображения

1. Если то выполняется операция растяжения , где 𝛽 – параметр растяжения (Рисунок 2.2).



Рисунок 2.2 – Операция растяжения

1. Если , то выполняется операция сжатия , где – параметр сжатия (Рисунок 2.3).



Рисунок 2.3 – Операция сжатия

При решении практически задач минимизации параметры растяжения и сжатия 𝛾 Нелдер и Мид рекомендует брать , , но Правильнее – выбирать эти параметры из интервалов и .

2.3 Ручной расчёт итераций Нелдера-Мида

Отобразим изначальную таблицу (Таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Изначальные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |

Вычислим приращения (Формулы 1.2 и 1.3):

Используя и , вычислим координаты двух остальных вершин симплекса (Формулы 1.4 и 1.5):

Итерация k = 0. Вычислим значение целевой функции в вершинах , , и обозначим наибольшее значение функции , следующее за наибольшим значением , наименьшее значение функции :

, , ;

Отобразим эти значения в таблицe 2.2.

Таблица 2.2 – Новые данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 | ,067 |  |  |

Наибольшее значение целевой функции соответствует вершине , поэтому необходимо отразить ее относительно центра тяжести остальных вершин и . центр тяжести расположен в точке

Используя свойство регулярности, найдем координаты отраженной вершины

В полученной вершине значение целевой функции ) = 1216,495

Таким образом, получим таблицу 2.3

Таблица 2.3 – Новые данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |

Следовательно, наблюдается уменьшение целевой функции < .

Так как не выполняется условие то выполним операцию растяжения симплекса.

В полученной вершине значение целевой функции .

Условие растяжения выполнено

Проверим условие окончания поиска. Определим координаты центра тяжести симплекса

В полученной точке .

Вычислим 𝜎 (сигма)



Так как условие окончания поиска не выполняется, то процесс итерации должен быть продолжен.

2.4 Программная реализация

Реализуем симплекс метод на языке высокого уровня Python.

На рисунках 1.2 – 1.7 представлен результат работы программы. Листинг кода приведен в Приложении А.

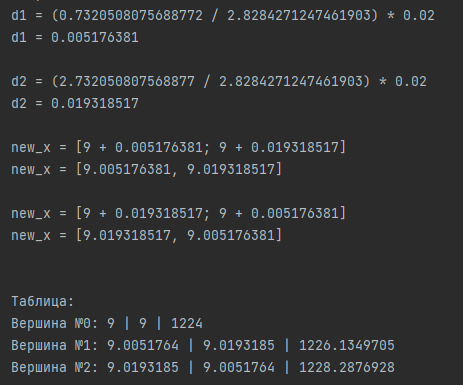


Рисунок 2.2 – Результат работы программы

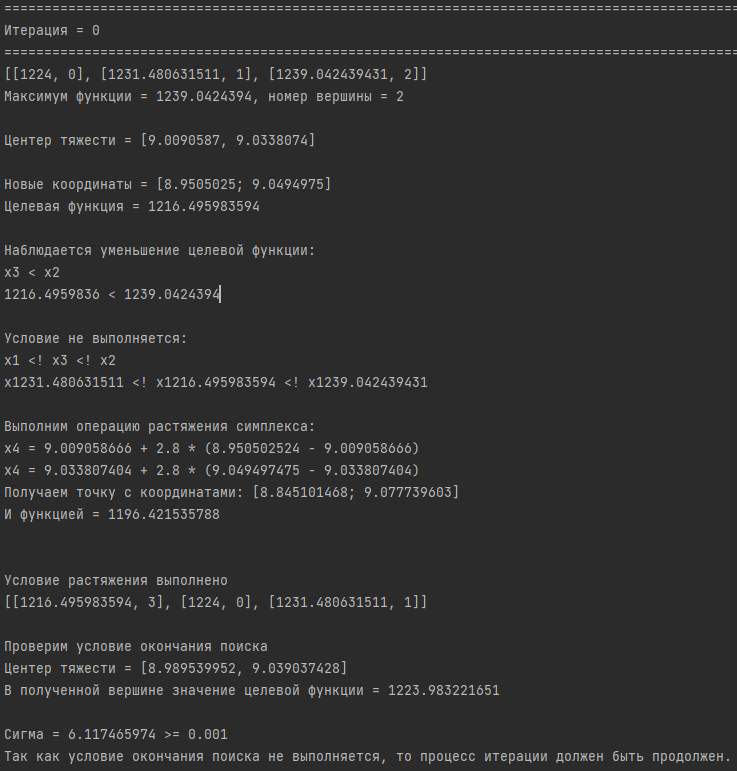


Рисунок 2.3 – Результат работы программы

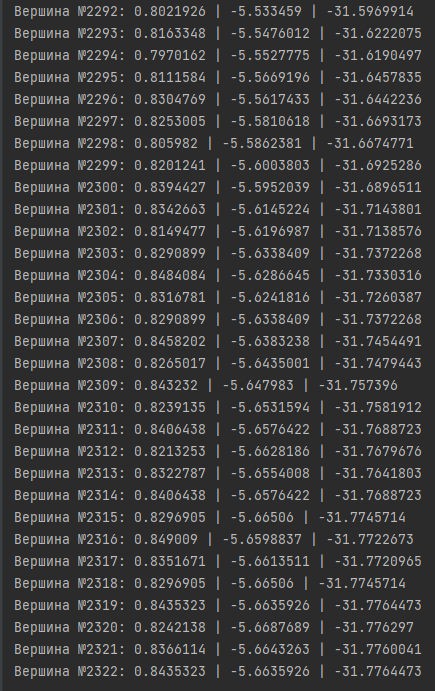


Рисунок 2.4 – Результат работы программы

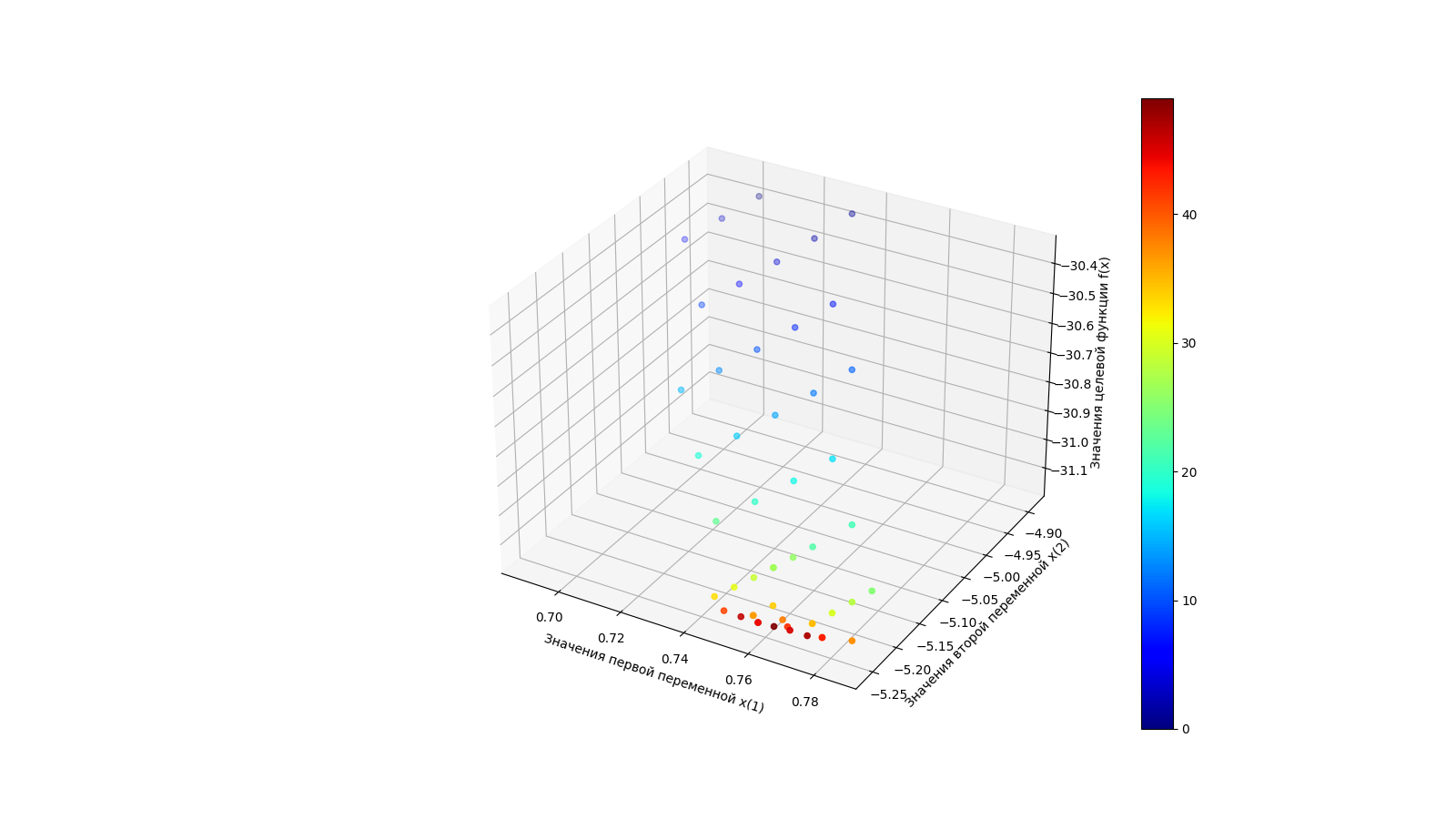


Рисунок 2.5 – Последние 50 элементов таблицы Нелдера Мида

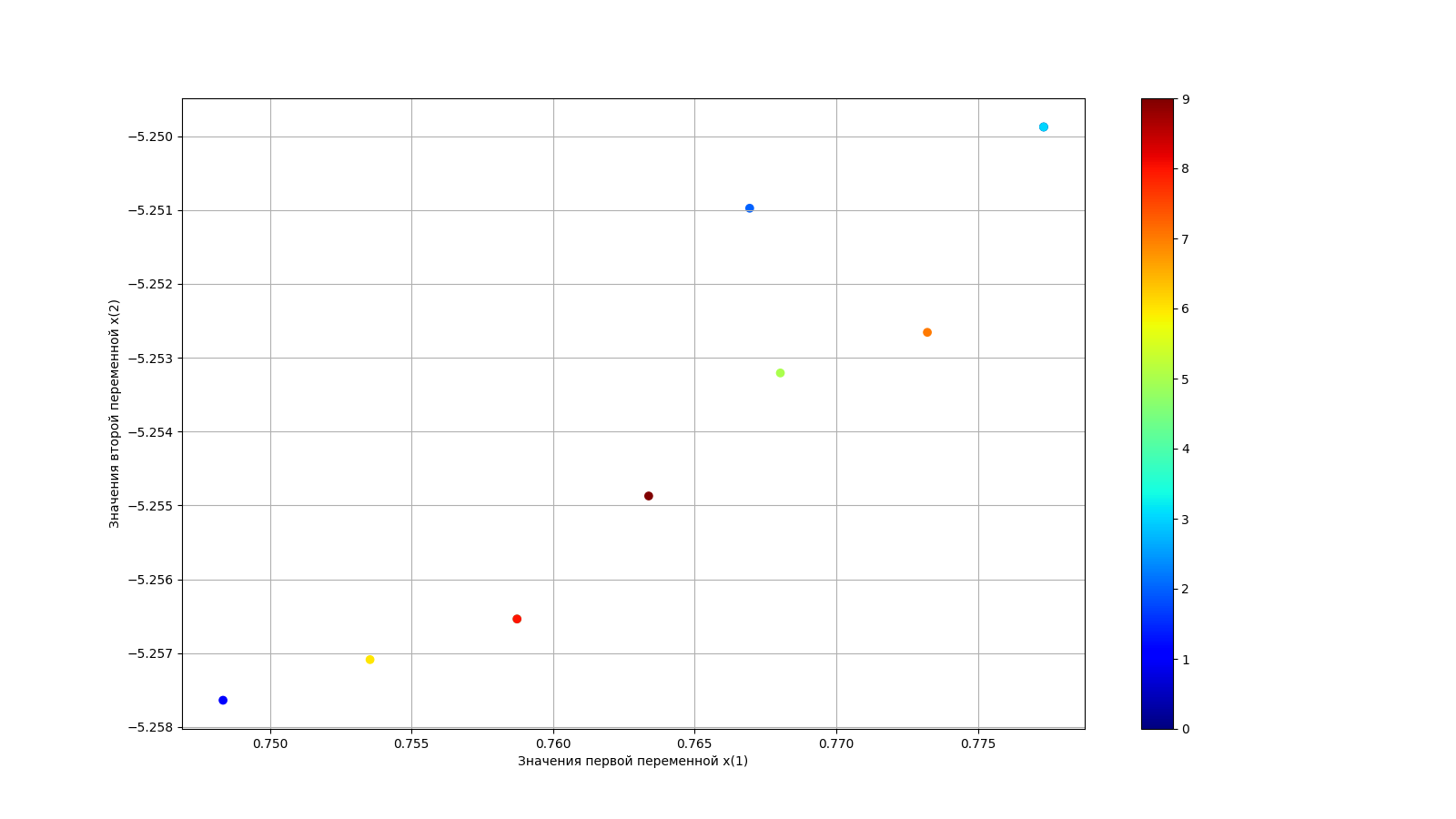


Рисунок 2.6 – Последние 5 элементов таблицы Нелдера Мида

Сравним полученные результаты при помощи сайта WolframAlpha.



Рисунок 2.7 – Результаты минимизации функции при помощи WolframAlpha

2.5 Вывод

По результатам работы, был реализован метод Нелдера Мида (метод нулевого порядка).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА: МЕТОД ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА П ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ

3.1 Постановка задачи

Пользуясь лекционными материалами и методическими указаниями.

Найти минимум целевой функции

методом градиентного спуска с постоянным шагом с точностью

Зададим начальную точку .

Начальную величину шага .

3.2 Описание симплекс метода

Сущность метода градиентного спуска с постоянным шагом заключается в следующем. Выбирается начальная точка из области определения функции . Координаты новой точки вычисляются по формуле

где *k* − номер итерации *k* = 0, 1, …,

− величина шага,

– градиент функции в точке ,

Начальная величина шага задаётся пользователем. В каждом новой точке поиска проверяется условие убывания функции . Если условие нарушается, то постепенно уменьшается величина шага , т.е. точка приближается к точке до тех пор, пока условие не выполнится. В полученной точке определяется новое направление градиента и осуществляется новый спуск. Процесс продолжается пока не будет выполнено условие окончания поиска. В качестве условия окончания поиска используется близость к нулю нормы градиента .

Геометрическая иллюстрация поиска минимума целевой функции методом градиентного спуска с постоянным шагом для случая *n* = 2 представлена на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1 - Графическая иллюстрация поиска точки минимума методом градиентного спуска с постоянным шагом

3.3 Ручной расчёт итераций методом градиентного спуска с постоянным шагом

Отобразим изначальную таблицу (Таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Изначальные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер вершины | Координата 1 | Координата 2 | Значение функции |
| 0 |  |  |  |

Найдем градиент функции в произвольной точке

***Итерация k = 0.*** Вычислим значение целевой функции 𝑓 (𝑥 (0)) и градиент

в начальной точке 𝑥 (0): 𝑓 (𝑥 (0)) = 0; ∇𝑓 (𝑥 (0)) = (−1; 0) 𝑇.